

# Recherche de solutions bifurquées et étude de leur stabilité dans les problèmes d'endommagement

---

**Résumé :** L'objectif de cette thèse est de développer un algorithme numérique permettant d'étudier la stabilité des solutions aux problèmes d'endommagement, obtenues en simulation numérique par la méthode des éléments finis et à l'aide de modèles régularisés par le gradient de l'endommagement, aussi appelés modèles non-locaux. La notion de stabilité est fondamentale du fait du caractère adoucissant des lois de comportement utilisées pour représenter le comportement de matériaux tels que le béton, qui ne nous permet pas de garantir l'unicité de la solution. La recherche d'extremum de l'énergie par la méthode des éléments finis peut alors conduire à obtenir plusieurs solutions. Parmi ces solutions, celles qui sont susceptibles d'être physiquement observables sont les solutions d'équilibre stable, invariantes sous l'effet de petites perturbations. La difficulté étant de tenir compte de la condition unilatérale d'irréversibilité de l'endommagement, qui conduit à définir le critère de stabilité comme la positivité de la dérivée seconde de l'énergie dans la direction des endommagements croissants. Ramené au cadre numérique et à une discrétisation spatiale du problème étudié, le critère de stabilité se définit comme la positivité d'un quotient de Rayleigh, écrit à partir de l'opérateur tangent des dérivées secondes et soumis à des contraintes d'inégalités. Pour étudier le signe de cette quantité, il est nécessaire d'estimer son minimum à l'aide d'un algorithme d'optimisation sous contraintes. En conclusion, l'objectif de la thèse est de rechercher un algorithme d'optimisation sous contraintes d'inégalités suffisamment efficace et robuste pour traiter des problèmes industriels à grand nombre de degrés de liberté et pouvant être adapté à des modélisations différentes, de l'implémenter dans Code\_Aster, puis de le tester et de le valider sur des cas tests extraits de la littérature.

**Mots clés :** endommagement, non-local, matériaux adoucissants, éléments finis, stabilité, optimisation numérique sous contraintes d'inégalités

---

**Abstract :** This work is concerned with the development and the implementation of a numerical optimization algorithm in an industrial software for studying the stability of non local gradient damage numerical solutions given by finite elements method. Stability is a fundamental concept, that takes into account the existence of multiple solutions which could emerge due to the softening constitutive laws generally used to represent the irreversible damage of materials like concrete. Among all those solutions, only stable ones, invariant by little perturbations, could be physically observed. The difficulty is to satisfy the irreversible constraint of damage which drives to define a stability criterion by the positivity of the second derivative of the total energy in the direction of increasing damage. It numerically leads to ensure the positivity of the minimum of a quadratic form, using the second derivative matrix and subjected to inequalities constraints. In conclusion, the aim of this work is to implement an efficient and robust numerical constraints minimization algorithm in Code\_Aster, adapted to different damage modelling, and to improve it using test cases found in the literature.

**Keywords :** non local damage, softening constitutive laws, finite elements method, stability, numerical optimization algorithm

---