

Initiation de fissure et propagation de défauts : approche par level-set épaisses

C. Stolz

LMS, CNRS-UMR7649, Ecole polytechnique, Palaiseau

LaMSID, CNRS-UMR2832, EdF R&D, Clamart

Objectif principal : concilier

- l'initiation,
- la propagation de fissure
- l'endommagement

dans une même formulation

Plusieurs approches

l'endommagement : $w(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = g(d)w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$, $Y = -\frac{\partial w}{\partial d} = -g'w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$

Problèmes : instabilités, localisation, perte d'unicité

Remèdes :

- théorie non locale
- théorie de gradient supérieur,
- champ de phases

Théorie locale

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = g(d)w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$$

$$g(d); \quad h(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \leq 0, \dot{d} \geq 0, \dot{d} h = 0$$

Théorie non locale (Pijaudier-Cabot,...)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}(x) = \frac{1}{\Omega(x)} \int_{\Omega} \psi(x-s) I(\boldsymbol{\varepsilon}(s)) \, d\Omega_s$$

Même loi, entre $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}(x)$ et d .

Choix du support et de la fonction poids

Lien direct avec les méthodes particulières, problèmes sur les frontières

Difficulté lien endommagement rupture.

Théorie de gradient supérieur et champ de phase

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \boldsymbol{\beta}), \quad \boldsymbol{\beta} = \nabla d$$

(Frémond-Nedjar, Karma, ...)

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, d, \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{2} k_o \boldsymbol{\beta}^2 + g(d) w_o(\boldsymbol{\varepsilon}) + h(d)$$

$$Y = -k_o \Delta d - h' - g' w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$$

Les fonctions $h(d)$, $g(d)$ sont choisies telles que dans un cas 1-D la réponse locale d prenne la forme $d = d_o \text{th}(\alpha x)$: $g(d) = 4d^3 - 3d^4$

Variations fortes de d concentrées sur une bande de largeur contrôlée par k_o et $W_o = w_o(\boldsymbol{\varepsilon}_o)$

Conditions aux limites à discuter, résoudre sur tout le volume

Ces méthodes ne localisent pas nécessairement sous un chargement de type fissure imposé.

Lien entre initiation de l'endommagement et la fissuration reste à discuter

Choix des grandeurs caractéristiques

Un autre point de vue

Séparer la zone saine de la zone endommagée par une surface

Surface en mouvement : Interface mobile

Surface = iso-potentielle = level-set

Discontinuité = saut = XFEM

Interface mobile

Etude du mouvement d'une interface avec changement de comportement

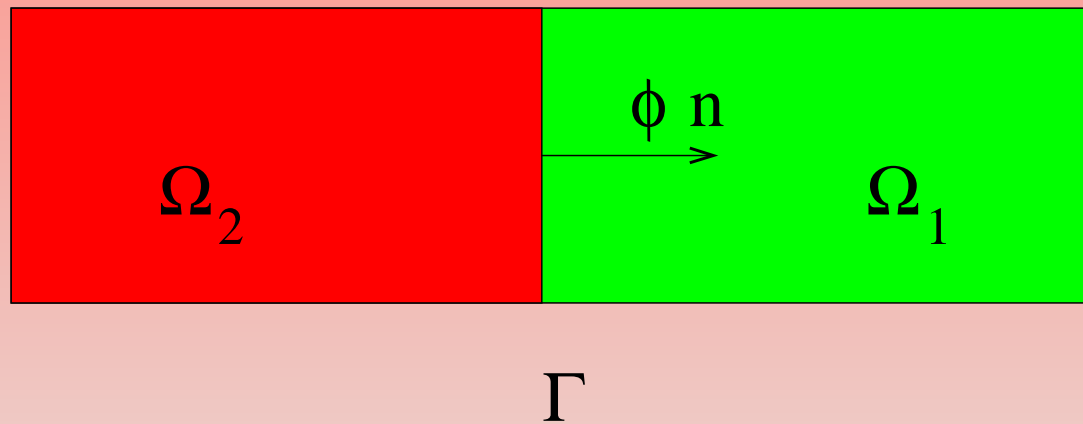
- par transition brutale : présence de discontinuités
- par transition continue : couche limite et endommagement continu.

Interface mobile et transformation mécanique

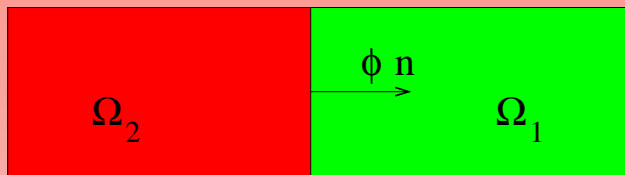
Le matériau 1 est transformé en un matériau 2 le long d'une interface mobile

Un flux de masse traverse la surface : perte de matériau sain (usure...)

Préliminaires



$$\begin{aligned} F &= \int_a^b f(x, t) dx \\ &= \int_a^{\Gamma(t)} f(x, t) dx + \int_{\Gamma(t)}^b f(x, t) dx \end{aligned}$$



Γ

$$\dot{F} = \int_a^b \dot{f} \, dx + (f(\Gamma^+, t) - f(\Gamma^-, t)) \dot{\Gamma}$$

$$[f]_{\Gamma} = f(\Gamma^+, t) - f(\Gamma^-, t)$$

Propagation d'une interface
 \Rightarrow présence de discontinuités.

Etudier les discontinuités possibles, relations d'Hadamard, ...

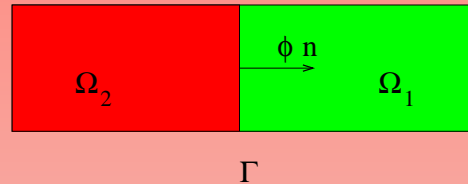
Discontinuité en élasticité linéaire

Sur une surface Γ ,

Continuité des déplacements $[\underline{u}]_{\Gamma} = 0$

Continuité des vecteurs contraintes $[\underline{\sigma}]_{\Gamma} \cdot \underline{n} = 0$

Pas de discontinuité des grandeurs mécaniques si et seulement si le comportement (modules) est continu.



Les deux milieux sont élastiques linéaires : x proportion de phase 2

Equilibre :

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1 = E_2 \varepsilon_2 = \Sigma, \quad u(0) = 0$$

Energie potentielle :

$$W(\sigma, x) = -\frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{x}{E_2} + \frac{1-x}{E_1} \right)$$

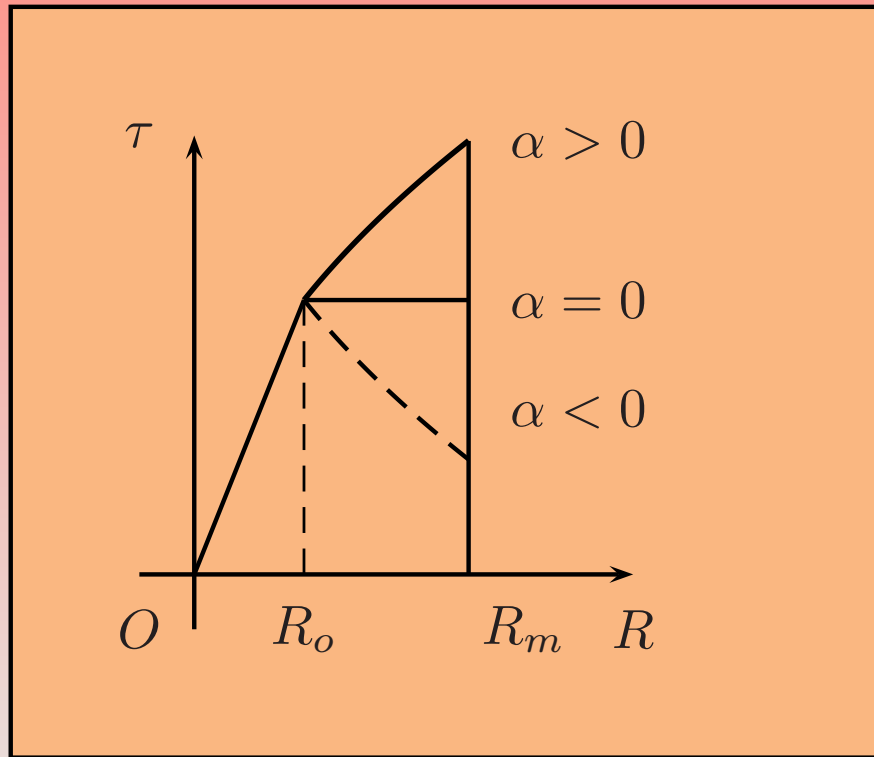
Taux de restitution d'énergie

$$G = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right); \quad D_m = G \dot{x}$$

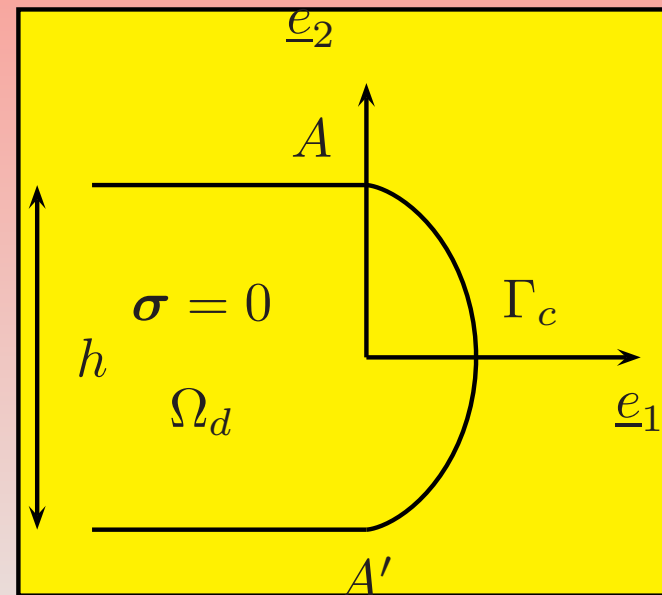
Etude d'autres exemples

- quasi-fissure en hyper-élasticité fragile
- sphère sous chargement isotrope

Quasi-fissure en conditions de mode III : cisaillement anti-plan



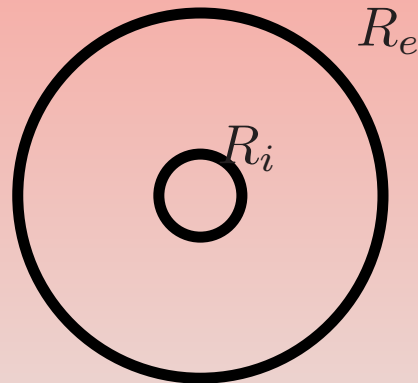
$$\sigma = K/\sqrt{r}f(\theta) \text{ as } r \rightarrow \infty$$



$$K^2 = h \frac{\tau_o^2}{\alpha + 1} \left[\left(\frac{R_m}{R_o} \right)^{\alpha+1} + \frac{\alpha - 1}{2} \right]$$

Neuber (1969), Bui-Ehrlacher (1978), Stolz (2010).

Autres exemples



Sous chargement isotrope $U(R_e, t) = E(t)R_e$

Critère $G(R_i, t) \leq G_c$ donne l'évolution de la surface

$$\mathcal{G}(R_i, E) = \frac{9E^2}{D^2(c)} (\kappa_1 - \kappa_2)(3\kappa_2 + 6\mu_1)(3\kappa_1 + 4\mu_1)$$

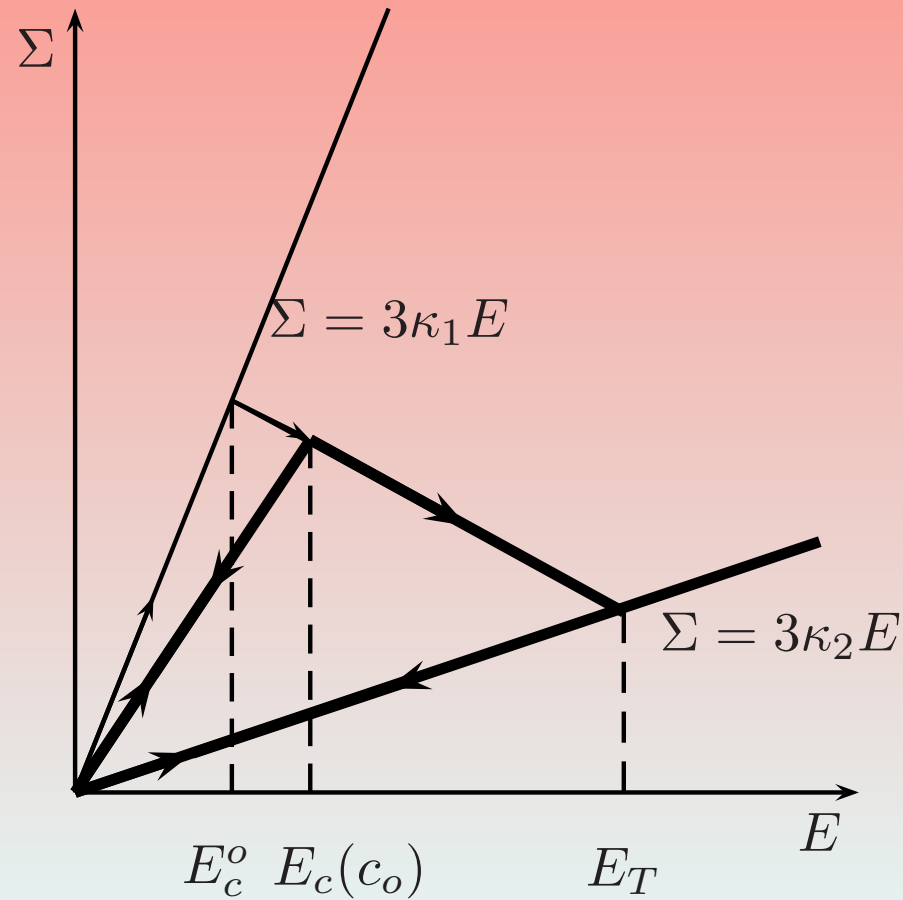
$$D(c) = 3\kappa_2 + 4\mu_1 + 3c(\kappa_1 - \kappa_2), \quad c = \frac{R_i^3}{R_e^3}$$

$$\kappa^{eff} = \frac{(3\kappa_2 + 4\mu_1)\kappa_1 - 4\mu_1c(\kappa_1 - \kappa_2)}{3\kappa_2 + 4\mu_1 + 3c(\kappa_1 - \kappa_2)}$$

Chargement monotone $c_o = R_i^3(0)/R_e^3$

$$\left\{ \begin{array}{lll} E(t) < E_c(c_o), & \mathcal{G}(R_i, E(t)) < G_c, & R_i(t) = R_i(0) \\ E(t) \geq E_c(c_o), & \mathcal{G}(R_i(t), E(t)) = G_c, & R_i(t) = f(E(t)), \\ E(t) = E_T, & \mathcal{G}(R_e, E_T) = G_c & R_i(T) = R_e \\ E(t) \geq E_T, & & R_i(t) = R_e \end{array} \right.$$

Réponse chargement quelconque



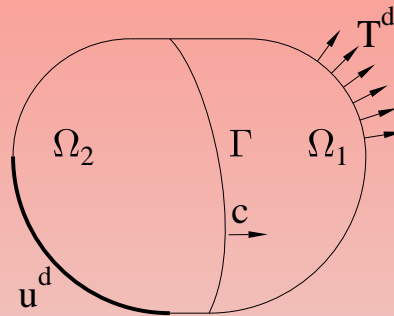
On a déterminé une charge critique d'initiation d'un défaut

Loi de propagation du défaut

La charge critique dépend de la géométrie

Cylindre sous chargement isotrope : charge critique plus basse.

Description - Cas Général



$$D_m = \int_S \mathcal{G}(s) c(s) \, dS$$

$$\mathcal{G} = [w]_{\Gamma} - \boldsymbol{\sigma} : [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\Gamma} \leq G_c$$

$$\mathcal{G} \leq G_c, \quad c \geq 0, \quad c (\mathcal{G} - G_c) = 0$$

Interprétation

$$D_{\Gamma} = \mathcal{G} c, \quad m = \rho c$$

Donc

$m = 0$, pas de perte de matériau sain \Rightarrow pas d'endommagement

$$\begin{cases} \mathcal{G}(X, t) < G_c, & c = 0 \\ \mathcal{G}(X, t) = G_c, & c \geq 0 \end{cases}$$

Avantage : problème d'évolution bien posé

Formulations variationnelles du problème en vitesse :

détermination des conditions de stabilité-bifurcation

étude de l'évolution d'un défaut préexistant.

Influence d'une énergie de surface : rôle stabilisant

$$\mathcal{G}_e(R_i, E) = \mathcal{G}_o(R_i, E) - \beta/R_i$$

mais charge critique d'initiation de défaut infinie...

Problème à résoudre : concilier

Une initiation d'un défaut

La propagation du défaut

Après une extension suffisante retrouver "une énergie de surface" β

Idée : interface d'épaisseur finie l_c .

Interface épaisse

La transition est continue et décrite par une loi d'endommagement continu.

Energie : $w(\varepsilon, d, \alpha) = (1 - d)w_o(\varepsilon, \alpha) + H(\alpha)$

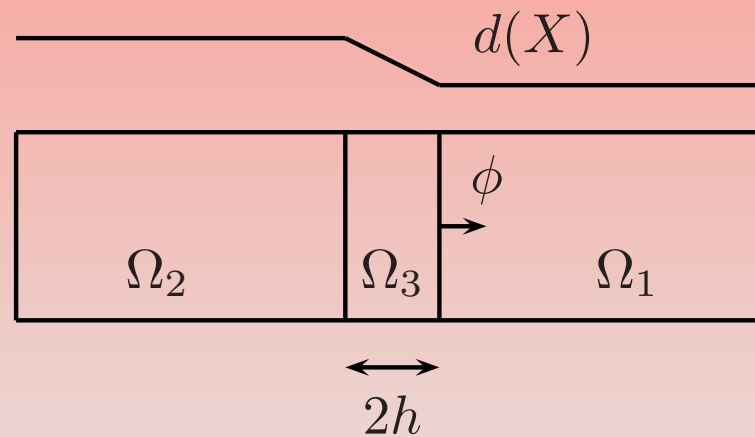
$$Y = -\frac{\partial w}{\partial d}, \quad A = -\frac{\partial w}{\partial \alpha}$$

d varie de 0 à 1, pas de discontinuité.

La dissipation se réduit à celle de volume

$$d_m = Y \dot{d} + A \dot{\alpha}$$

Dissipation

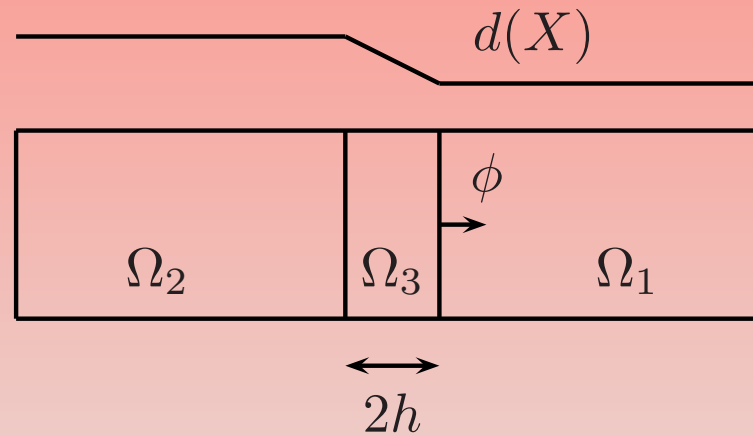


$$D_m = \int_h Y \dot{d} + A \dot{\alpha} dz$$

En suivant le front mobile

$$f(x, t) = f(x - \phi t \underline{n}, t) \quad \dot{f} = -\phi \nabla f \cdot \underline{n} + D_\phi f$$

Exemple 1-D :



Energie : $W = \frac{1}{2}E(d)\epsilon^2$

Conditions de raccordement $E(0) = E_1, E(1) = E_2$

Etude de la dissipation sous condition stationnaire ($\dot{d} + \phi \nabla d \cdot \underline{n} = 0$)

$$D_m = \phi \int_h^0 \frac{1}{2} \sigma^2 \left(-\frac{E'}{E^2}\right) \nabla d \, dz = \phi \frac{1}{2} \sigma^2 \int_1^0 \left(-\frac{E'}{E^2}\right) dd = G\phi$$

Dissipation mécanique

$$D_m = -\phi \int_h (Y \nabla d + A \nabla \alpha) dz + \int_h (Y D_\phi d + A D_\phi \alpha) dz$$

on retrouve une forme analogue

$$D_m = \bar{G} \phi + \int_h d_\phi dz$$

En mouvement stationnaire : le dernier terme est nul.

$$\bar{G} = - \int_h (Y \nabla d + A \nabla \alpha) dz \leq h Y_c$$

Initialement la barre est homogène

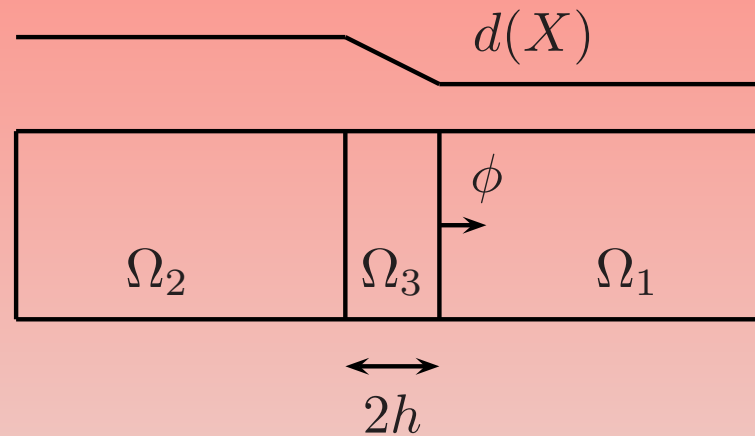
$$W = \frac{1}{2} \Sigma^2 \frac{L}{E_1}$$

A partir d'une valeur critique Σ_c, ϵ_c une bande se développe

Hypothèse de stationnarité locale

Le module d'Young $E(z)$ est une fonction donnée dans la bande,

z coordonnée relative



- phase 1 : barre homogène, $D_m=0$
- phase 2 ; initiation d'un défaut $2e_o \leq l_c = 2h$

$$D_m = - \int_{-e_o}^{+e_o} Y \nabla d dz = -\frac{1}{2} \Sigma^2 \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E(e - 2_o)} \right) \dot{e}_o$$

- phase 3 : propagation d'une bande $2h = l_c$

$$D_m = -\frac{1}{2} \Sigma^2 \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)$$

Conclusion

$$d(z) = d(x - a(t)) = d_o$$

est une surface isoendommagement qui vérifie la relation de transport

$$\dot{d} + a \nabla d \cdot \underline{n} = 0$$

Unidimension a est indépendant de z .

Généralisation

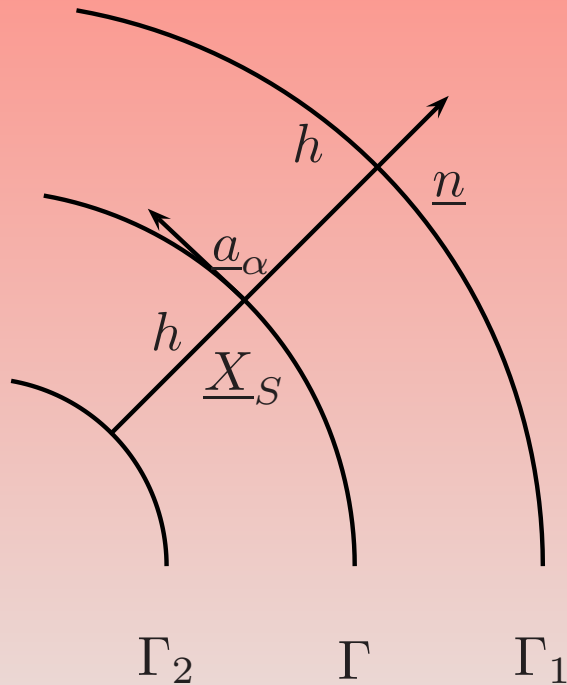
On introduit la courbe de niveau $\phi = h - z$ telle

- $d(\phi) = 0; \phi \leq 0$
- $d'(\phi) \geq 0; 0 \leq \phi \leq lc$
- $d(\phi) = 1; \phi \geq lc$

où ϕ est une fonction distance signée $\|\nabla\phi\| = 1$

Dans la suite on choisit la distance $\phi = z$.

Géométrie de l'interface : influence de la courbure: $\nabla \underline{n} \cdot \underline{a}_\alpha = -b_\alpha^\beta \underline{a}_\beta$



$$dS(z) = \det(\mathbf{b} + z \mathbf{I}) = j(z) dS$$

$$\int_B f d\Omega = \int_\Gamma \left(\int_h f j(z) dz \right) dS = \int_\Gamma f_S dS$$

Mouvement suivant la bande

$$m(S, z, t) = M(S, t) + z\underline{n}(S, t)$$

A $t + dt$ le point M est venu en $M + a\underline{n}$ et la normale a tourné

$$m(t + dt) - m(t) = D_a m = a\underline{n} + zD_a \underline{n}, \quad D_a \underline{n} = -\frac{da}{ds} \underline{T}$$

Dérivée suivant le mouvement

$$D_a(f) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{f(m(t + dt), t + dt) - f(m(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \underline{X}} \cdot D_a m$$

Exemple

$$D_a(\underline{T}) = -\frac{da}{ds} \underline{n}, \quad D_a(\underline{n}) = \frac{da}{ds} \underline{T}, \quad D_a \Gamma = \frac{d^2 a}{dS^2} + \Gamma^2 a \dots$$

Cas courant

$$\phi(\underline{X}, t) = \min_S (\underline{X} - M(S, t)) \cdot \underline{n}(S, t) = z$$

$$\nabla \phi = \underline{n}$$

$$\Delta \phi = -\frac{\Gamma}{1 - \Gamma z}$$

Relation avec la courbure à la cote z

Dissipation d'endommagement

$$D_m = \int_B \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega$$

Comme

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = D_a \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \cdot D_a m$$

On en déduit pour le cas de mouvement stationnaire

$$D_m = - \int_B \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon} - \nabla \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot D_a m \, d\Omega$$

Intégration par partie

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial B} (\underline{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{n}} \cdot \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{u}}) \cdot D_a m \, dS + \int_B \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \underline{\mathbf{u}} - \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{u}}) : \nabla D_a m \, d\Omega$$

Puis par passage à la limite pour épaisseur nulle

$$D_m = \int_S \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}]_{\Gamma} - \boldsymbol{\sigma} : [\boldsymbol{\varepsilon}]_{\Gamma} \, dS \, a$$

Dissipation associée à l'interface

Milieu à endommagement continu

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (1 - d)w_o(\boldsymbol{\varepsilon})$$

La dissipation s'écrit

$$D_m = \int_B Y \dot{d} \, d\Omega$$

Mais $d = d(\phi)$ donc

$$\dot{d} = d' \dot{\phi} = -ad' \nabla \phi \cdot \underline{n}$$

donc

$$D_m = - \int_B Y d' \nabla \phi \cdot \underline{n} \, d\Omega = - \int_S \int_e Y d' (1 - \Gamma z) dz \, dS$$

$$\bar{\mathcal{G}} = - \int_e Y d' (1 - \Gamma z) ds$$

Loi de propagation

- Choix 1

$$\frac{1}{e}\bar{\mathcal{G}} \leq G_c, \quad a \geq 0, \quad \left(\frac{1}{e}\bar{\mathcal{G}} - G_c\right)a = 0$$

- Choix 2

$$\bar{\mathcal{G}} = - \int_e Y d'(1 - \Gamma z) ds \leq - \int_e Y_c d'(1 - \Gamma z) ds = \bar{G}_c(e, S),$$

$$a \geq 0; \quad (\bar{\mathcal{G}} - \bar{G}_c(e, S))a = 0$$

Implémentation numérique

Exemple

Conclusions

Potentialité de la méthode

Généralisation au cas élastoplastique

Etude de la génération du défaut initial et analyse asymptotique

Etude du branchement de fissure dans ce cadre.

Passage endommagement-rupture : naturellement contenu

Etude et analyse des grandeurs l_c par des mesures in-situ (un seul paramètre)

Etude de la loi $d(\phi)$ par la fonction génératrice du choc : (Stolz-1989)