

Discrétisations non-conformes d'un modèle poromécanique sur maillages généraux

Simon Lemaire

IFP Énergies nouvelles

Séminaire du LaMSID - Mardi 8 octobre 2013

Plan de l'exposé

Les couplages poromécaniques à l'IFPEn

Le modèle de Biot

Approximation interne

Mais où placer les inconnues ?

Quelques exemples numériques 2D

Perspectives

Plan de l'exposé

Les couplages poromécaniques à l'IFPEn

Le modèle de Biot

Approximation interne

Mais où placer les inconnues ?

Quelques exemples numériques 2D

Perspectives

Les couplages poromécaniques à l'IFPE

Mécanique

- codes spécialisés très riches : Code_Aster ou ABAQUS®
- discrétisation : éléments finis conformes
- maillage utilisé : conforme (sauf si le modèle est lui-même discontinu)

Écoulement

- codes dédiés (modèle de Darcy compositionnel) : PumaFlow™ ou COORES™
- discrétisation : volumes finis centrés (TPFA, MPFA)
- maillage utilisé : CPG (Corner Point Geometry), grille hexaédrique déformée (LGR proche-puits, érosions, failles) \rightsquigarrow non-compatible avec un maillage éléments finis standard

Couplage

- remaillage local le cas échéant : peut être compliqué dans le cas des failles
- interpolation : entre maillages 3D
- couplage externe : couplage séquentiel (*undrained split, fixed stress split*)

Les couplages poromécaniques à l'IFPEn

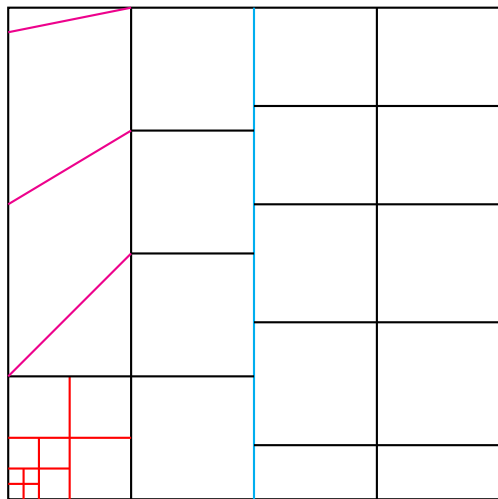


Figure: Exemple schématique 2D de maillage CPG avec LGR, érosions et faille

Objectifs

- **discrétiser la mécanique directement sur le maillage CPG** : discrétisation non-conforme
- **couplage interne** : solver monolithique (ou couplage séquentiel)

Verrous numériques

- **spécifique à la non-conformité** : coercivité de la mécanique

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})$$

- **non-spécifiques** :
 - (i) **verrouillage numérique (*locking*)** pour les matériaux quasi-incompressibles, **stabilité du couplage** (lorsqu'il est de type point-selle)
 - (ii) **discontinuités** de propriétés physiques
 - (iii) **coût numérique** : nombre d'inconnues, conditionnement des systèmes

Plan de l'exposé

Les couplages poromécaniques à l'IFPEn

Le modèle de Biot

Approximation interne

Mais où placer les inconnues ?

Quelques exemples numériques 2D

Perspectives

Le modèle de Biot

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, dénote un **milieu poreux élastique linéaire, saturé par un fluide visqueux faiblement compressible**, dans lequel les effets d'inertie sont négligeables.

Mécanique

- loi de Hooke (cas isotrope, homogène) :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{u}) = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \underline{\underline{I}}_d, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

- contrainte totale s'appliquant au squelette : $\underline{\underline{\sigma}}^T(\mathbf{u}) = \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{u}) - \alpha p \underline{\underline{I}}_d$

Écoulement

- loi de Darcy monophasique (gravité négligée) : $\mathbf{v} = -\kappa \nabla p$
- variation de masse fluide dans le squelette :

$$\delta m = \rho_0(\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} dV_0) + \rho_0(c_0^s \delta p dV_0) + dV_0(\rho_0 c_0^f \delta p) = \rho_0(\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 \delta p) dV_0$$

Le modèle de Biot

Dénotons $T > 0$ le temps de simulation.

Modèle de Biot quasistatique

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \underline{\underline{g}}^T(\mathbf{u}) &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \partial_t \left(\frac{\delta m}{dV_0} \right) + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) &= \rho_0 h && \text{dans } \Omega \times (0, T] \end{aligned}$$

Le modèle de Biot

Dénotons $T > 0$ le temps de simulation, et posons $\langle h \rangle_\Omega = 0$ sur $(0, T]$, $\langle \beta \rangle_\Omega = 0$.

Modèle de Biot quasistatique

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{u}) + \alpha \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \partial_t (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p) - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) &= h && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ -\kappa \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ \langle p \rangle_\Omega &= 0 && \text{sur } (0, T] \\ (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p)(\cdot, 0) &= \beta && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Le modèle de Biot

Dénotons $T > 0$ le temps de simulation, et posons $\langle h \rangle_\Omega = 0$ sur $(0, T]$, $\langle \beta \rangle_\Omega = 0$.

Modèle de Biot quasistatique

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{u}) + \alpha \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \partial_t (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p) - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) &= h && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ -\kappa \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ \langle p \rangle_\Omega &= 0 && \text{sur } (0, T] \\ (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p)(\cdot, 0) &= \beta && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Paramètres physiques

- mécanique
- écoulement
- couplage

Le modèle de Biot

Dénotons $T > 0$ le temps de simulation, et posons $\langle h \rangle_{\Omega} = 0$ sur $(0, T]$, $\langle \beta \rangle_{\Omega} = 0$.

Modèle de Biot quasistatique

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{u}) + \alpha \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \partial_t (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p) - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) &= h && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ -\kappa \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ \langle p \rangle_{\Omega} &= 0 && \text{sur } (0, T] \\ (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p)(\cdot, 0) &= \beta && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Paramètres physiques

- mécanique : $0 < \mu < +\infty$, $0 < \lambda \leq +\infty$ ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ lorsque $\lambda = +\infty$)
- écoulement
- couplage

Le modèle de Biot

Dénotons $T > 0$ le temps de simulation, et posons $\langle h \rangle_{\Omega} = 0$ sur $(0, T]$, $\langle \beta \rangle_{\Omega} = 0$.

Modèle de Biot quasistatique

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{u}) + \alpha \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \partial_t (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p) - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) &= h && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ -\kappa \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ \langle p \rangle_{\Omega} &= 0 && \text{sur } (0, T] \\ (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p)(\cdot, 0) &= \beta && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Paramètres physiques

- mécanique : $0 < \mu < +\infty$, $0 < \lambda \leq +\infty$ ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ lorsque $\lambda = +\infty$)
- écoulement : $0 \leq \underline{\kappa} \leq \kappa(\mathbf{x}) \leq \bar{\kappa} < +\infty$, p.p. $\mathbf{x} \in \Omega$
- couplage

Le modèle de Biot

Dénotons $T > 0$ le temps de simulation, et posons $\langle h \rangle_\Omega = 0$ sur $(0, T]$, $\langle \beta \rangle_\Omega = 0$.

Modèle de Biot quasistatique

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \underline{\sigma}(\mathbf{u}) + \alpha \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \partial_t (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p) - \nabla \cdot (\kappa \nabla p) &= h && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ -\kappa \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ \langle p \rangle_\Omega &= 0 && \text{sur } (0, T] \\ (\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p)(\cdot, 0) &= \beta && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Paramètres physiques

- **mécanique** : $0 < \mu < +\infty$, $0 < \lambda \leq +\infty$ ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ lorsque $\lambda = +\infty$)
- **écoulement** : $0 \leq \underline{\kappa} \leq \kappa(\mathbf{x}) \leq \bar{\kappa} < +\infty$, p.p. $\mathbf{x} \in \Omega$
- **couplage** : $0 < \alpha < +\infty$, $0 \leq c_0 < +\infty$

Le modèle de Biot

Dénotons $T > 0$ le temps de simulation, et posons $\langle h \rangle_\Omega = 0$ sur $(0, T]$, $\beta = 0$ sur Ω .

Modèle de Biot quasistatique

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \times (0, T] \\ (\nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p)(\cdot, t) - \int_0^t \nabla \cdot (\kappa(\cdot) \nabla p(\cdot, s)) \, ds &= \int_0^t h(\cdot, s) \, ds && \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ -\kappa \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T] \\ \langle p \rangle_\Omega &= 0 && \text{sur } (0, T] \\ (\nabla \cdot \mathbf{u} + c_0 p)(\cdot, 0) &= 0 && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

Paramètres physiques

- **mécanique** : $0 < \mu < +\infty$, $0 < \lambda \leq +\infty$ ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ lorsque $\lambda = +\infty$)
- **écoulement** : $0 \leq \underline{\kappa} \leq \kappa(\mathbf{x}) \leq \bar{\kappa} < +\infty$, p.p. $\mathbf{x} \in \Omega$
- **couplage** : $0 < \alpha < +\infty$, $0 \leq c_0 < +\infty \rightsquigarrow \alpha = 1$

Plan de l'exposé

Les couplages poromécaniques à l'IFPEn

Le modèle de Biot

Approximation interne

Mais où placer les inconnues ?

Quelques exemples numériques 2D

Perspectives

Posons $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \mid \langle q \rangle_\Omega = 0\}$, et $\overline{H^1}(\Omega) = H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$.

Formulation faible en espace

P.p. $t \in (0, T]$, trouver $\mathbf{u}(t) \in H_0^1(\Omega)^d$ et $p(t) \in \overline{H^1}(\Omega)$ tels que

$$(\underline{\alpha}(\mathbf{u}(t)), \underline{\xi}(\mathbf{v}))_{0,\Omega} - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p(t))_{0,\Omega} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}(t), q)_{0,\Omega} + c_0 (p(t), q)_{0,\Omega} + \int_0^t (\kappa \nabla p(s), \nabla q)_{0,\Omega} ds = \int_0^t (h(s), q)_{0,\Omega} ds \quad \forall q \in \overline{H^1}(\Omega)$$

Approximation interne

Posons $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \mid \langle q \rangle_\Omega = 0\}$, et $\overline{H^1}(\Omega) = H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$.

Approximation interne

P.p. $t \in (0, T]$, trouver $\mathbf{u}_h(t) \in \mathbf{U}_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ et $p_h(t) \in P_h \subset \overline{H^1}(\Omega)$ tels que

$$(\underline{\sigma}(\mathbf{u}_h(t)), \underline{\xi}(\mathbf{v}_h))_{0,\Omega} - (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, p_h(t))_{0,\Omega} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h(t), q_h)_{0,\Omega} + c_0 (p_h(t), q_h)_{0,\Omega} + \int_0^t (\kappa \nabla p_h(s), \nabla q_h)_{0,\Omega} ds = \int_0^t (h(s), q_h)_{0,\Omega} ds \quad \forall q_h \in P_h$$

Approximation interne

Posons $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \mid \langle q \rangle_\Omega = 0\}$, et $\overline{H^1}(\Omega) = H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$.

Approximation interne

P.p. $t \in (0, T]$, trouver $\mathbf{u}_h(t) \in \mathbf{U}_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ et $p_h(t) \in P_h \subset \overline{H^1}(\Omega)$ tels que

$$(\underline{\alpha}(\mathbf{u}_h(t)), \underline{\xi}(\mathbf{v}_h))_{0,\Omega} - (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, p_h(t))_{0,\Omega} = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_h(t), q_h)_{0,\Omega} + c_0 (p_h(t), q_h)_{0,\Omega} + \int_0^t (\kappa \nabla p_h(s), \nabla q_h)_{0,\Omega} ds = \int_0^t (h(s), q_h)_{0,\Omega} ds \quad \forall q_h \in P_h$$

Stabilité du modèle discret

$$S_h(t) = \begin{pmatrix} A_h(t) & B_h^T(t) \\ B_h(t) & -c_0 D_h(t) - \int_0^t C_h^\kappa(s) ds \end{pmatrix}$$

- $S_h(t)$ inversible $\Leftrightarrow A_h(t)$ et $B_h(t)A_h^{-1}(t)B_h^T(t) + c_0 D_h(t) + \int_0^t C_h^\kappa(s) ds$ (symétriques) définies positives
- cas $c_0 = 0$ et $\underline{\kappa} = 0/t = 0$: $S_h(t)$ inversible $\Leftrightarrow A_h(t)$ (symétrique) définie positive et $B_h^T(t)$ injective

Définie positivité de $A_h(t)$

$$\begin{aligned}(\underline{\sigma}(\mathbf{v}_h), \underline{\varepsilon}(\mathbf{v}_h))_{0,\Omega} &= 2\mu \|\underline{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \lambda \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 \geq 2\mu \|\underline{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq 2\mu \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega}^2 ?\end{aligned}$$

- **mouvements de corps rigide** : $\ker(\underline{\varepsilon}) = \{\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \underline{B}\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d, \underline{B}^T = -\underline{B}\}$
- **inégalité de Korn** : $\|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{2} \|\underline{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}$, pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$
- **inégalité de Korn discrète** : **ici**, conséquence de $\mathbf{U}_h \subset H_0^1(\Omega)^d$

Injectivité de $B_h^T(t) \Leftrightarrow$ surjectivité de $B_h(t)$

- **au niveau continu** : l'opérateur $\nabla \cdot : H_0^1(\Omega)^d \rightarrow L_0^2(\Omega)$ est surjectif
- **au niveau discret** : la surjectivité de $B_h(t)$ passe par l'existence d'un interpolateur $\mathcal{I}_h : H_0^1(\Omega)^d \rightarrow \mathbf{U}_h$ tel que, pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$,
 - (i) $(\nabla \cdot \mathcal{I}_h(\mathbf{v}), q_h)_{0,\Omega} = (\nabla \cdot \mathbf{v}, q_h)_{0,\Omega}$, pour tout $q_h \in P_h(\subset L_0^2(\Omega))$
 - (ii) $\|\nabla \mathcal{I}_h(\mathbf{v})\|_{0,\Omega} \leq C_S \|\nabla \mathbf{v}\|_{0,\Omega}$, où $C_S > 0$ ne dépend pas de h
- **de manière équivalente** : le couple (\mathbf{U}_h, P_h) vérifie une condition LBB (inf-sup)

Phénomène de verrouillage numérique (*locking*)

Considérons le problème d'élasticité seul : trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{U}_h \subset H_0^1(\Omega)^d$ tel que

$$2\mu (\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}_h), \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}_h))_{0,\Omega} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h.$$

Lorsque $\lambda = +\infty$, $\mathbf{u}_h \in \underline{\underline{U}}_h = \{\mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h \mid \nabla \cdot \mathbf{w}_h = 0\}$, dont les propriétés d'approximation peuvent être très mauvaises.

On considère la modification suivante : trouver $\mathbf{u}_h \in \mathbf{U}_h$ tel que

$$2\mu (\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}_h), \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}_h))_{0,\Omega} + \lambda (\Pi_h(\nabla \cdot \mathbf{u}_h), \Pi_h(\nabla \cdot \mathbf{v}_h))_{0,\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h,$$

où Π_h est la projection L^2 -orthogonale sur P_h .

Lorsque $\lambda = +\infty$, $\mathbf{u}_h \in \overline{\mathbf{U}}_h = \{\mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h \mid \Pi_h(\nabla \cdot \mathbf{w}_h) = 0\}$.

Si le couple (\mathbf{U}_h, P_h) satisfait une condition LBB (uniforme), alors

$$\inf_{\mathbf{u}_h \in \overline{\mathbf{U}}_h} \|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{w}_h\|_{0,\Omega} \leq C \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h} \|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega},$$

et l'approximation n'est pas affectée par λ .

Plan de l'exposé

Les couplages poromécaniques à l'IFPEn

Le modèle de Biot

Approximation interne

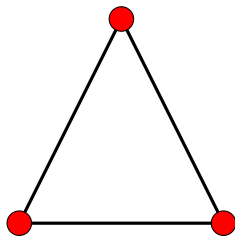
Mais où placer les inconnues ?

Quelques exemples numériques 2D

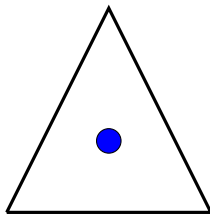
Perspectives

Mais où placer les inconnues ?

Éléments finis conformes (Murad *et al.*)



(a) ddl en déplacement



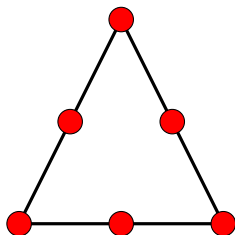
(b) ddl en pression

Couple $(\mathbb{P}_1^d, \mathbb{P}_0)$

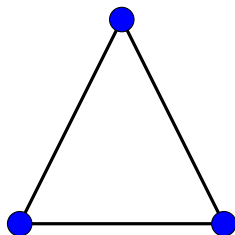
- **avantages** : mécanique coercive, pression centrée, peu coûteux
- **inconvénients** : écoulement pas forcément coercif, non LBB stable, maillages conformes

Mais où placer les inconnues ?

Éléments finis conformes (Murad *et al.*)



(c) ddl en déplacement



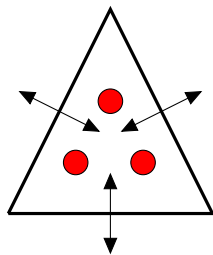
(d) ddl en pression

Couple $(\mathbb{P}_2^d, \mathbb{P}_1)$

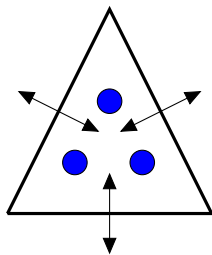
- **avantages** : mécanique coercive, écoulement coercif, LBB stable
- **inconvénients** : coûteux, pression non-centrée, maillages conformes

Mais où placer les inconnues ?

Galerkin discontinu (Di Pietro)



(e) ddl en déplacement



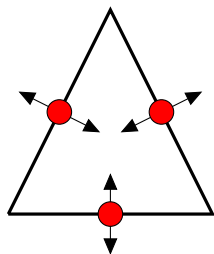
(f) ddl en pression

Couple $(\mathbb{P}_d^1(\mathcal{T}_h)^d, \mathbb{P}_d^1(\mathcal{T}_h))$

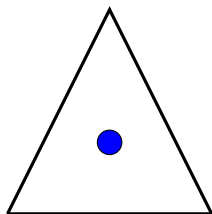
- **avantages** : mécanique coercive et robuste au *locking*, écoulement coercif, couplage stable (avec stabilisation des sauts de pression), maillages généraux
- **inconvénients** : très coûteux (ddl + stencil), pression non-centrée, compliqué à implémenter

Mais où placer les inconnues ?

Éléments finis non-conformes (Hansbo et Larson)



(g) ddl en déplacement



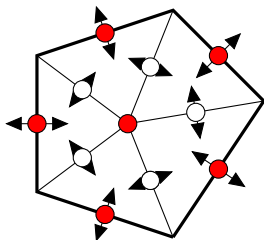
(h) ddl en pression

Couple $(\mathbb{CR}(\mathcal{T}_h)^d, \mathbb{P}_d^0(\mathcal{T}_h))$

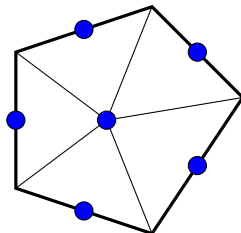
- **avantages** : mécanique coercive, LBB stable, pression centrée, très peu coûteux en termes de ddl
- **inconvénients** : écoulement pas forcément coercif, stencil augmenté pour la mécanique, maillages conformes

Mais où placer les inconnues ?

Une idée mêlant VFH, ccG et EF non-conformes



(i) ddl en déplacement



(j) ddl en pression

Couple $(\mathcal{CR}(\mathcal{K}_h)^d, \mathcal{CR}(\mathcal{K}_h))$

- **avantages** : mécanique coercive, écoulement coercif, couple $(\mathcal{CR}(\mathcal{K}_h)^d, \mathbb{P}_d^0(\mathcal{K}_h))$ LBB stable, pression centrée, relativement peu coûteux en termes de ddl, maillages généraux
- **inconvenient** : stencil augmenté pour la mécanique

Mais où placer les inconnues ?

Et la théorie ?

- $\mathcal{CR}(\mathcal{K}_h) \subset \mathbb{P}_d^1(\mathcal{P}_h)$: espace d'approximation sur maillages généraux, généré par un élément fini non-conforme pyramidal, doté des propriétés optimales de conformité faible et d'approximation, garantissant l'existence d'un opérateur de Fortin (Di Pietro et L.)
- discrétisation $\mathcal{CR}(\mathcal{K}_h)^d$ de l'élasticité linéaire : lorsque celle-ci est stabilisée par les sauts (inégalité de Korn discrète), on peut montrer une estimation d'erreur optimale et robuste au *locking* sur maillages généraux pour des solutions suffisamment régulières (Di Pietro et L.)
- discrétisation Euler implicite- $(\mathcal{CR}(\mathcal{K}_h)^d, \mathcal{CR}(\mathcal{K}_h))$ du modèle de Biot : on montre la convergence forte $L_t^2(L_x^2)$ de la déformation et de la reconstruction de pression sous des hypothèses de régularité minimale sur les solutions (Agélas, Eymard et L.)

Plan de l'exposé

Les couplages poromécaniques à l'IFPEn

Le modèle de Biot

Approximation interne

Mais où placer les inconnues ?

Quelques exemples numériques 2D

Perspectives

Un exemple de *locking* en élasticité linéaire

- solution exacte sur $\Omega = (0, 1)^2$:

$$u_x = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \sin(2\pi y), \quad u_y = \sin(2\pi x) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right)$$

- coefficients de Lamé : $\mu = 1$ et $\lambda \in \{1, 10^3, 10^6\}$
- lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$: $\mathbf{u} \rightarrow (\sin(2\pi y), \sin(2\pi x))$, $|\nabla \cdot \mathbf{u}| \rightarrow 0$ et $\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}$ reste bornée
- $(\mathcal{T}_h)_h$ suite de maillages triangulaires conformes : $\mathfrak{CA}(\mathcal{T}_h)^d$ vs. \mathbb{P}_1^d pour $\lambda \in \{1, 10^3, 10^6\}$

Quelques exemples numériques 2D

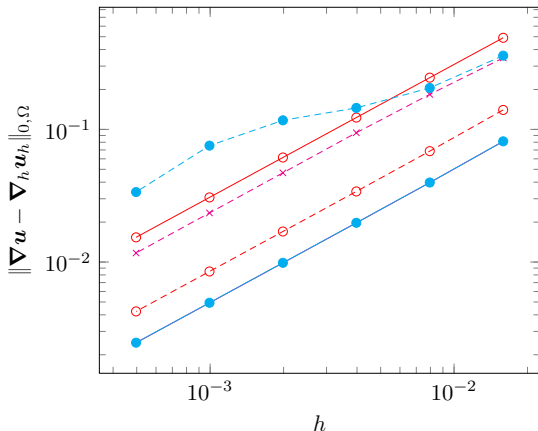
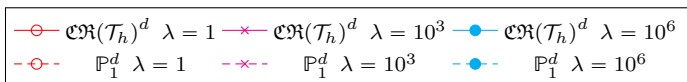


Figure: Erreur H^1 relative

Quelques exemples numériques 2D

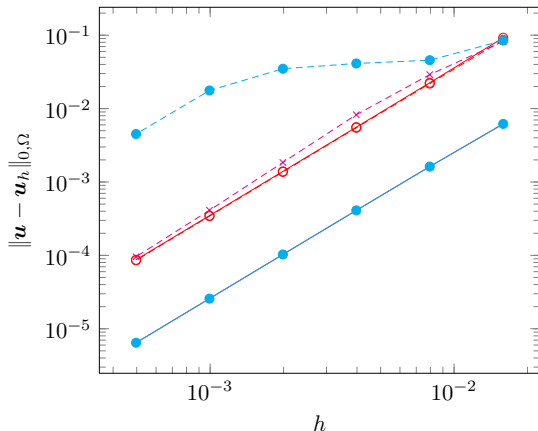
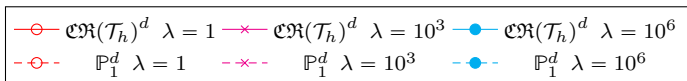


Figure: Erreur L^2 relative

Un exemple de régularisation de pression en poroélasticité

- solution exacte sur $(0, 1)^2 = \Omega \times (0, T]$:

$$u_x = e^{-t} x^2 y, \quad u_y = -e^{-t} x y^2, \quad p = e^{-t} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

- paramètres physiques : $\mu = 1$, $\lambda = 1$, $\alpha = 1$, $\kappa = 1$, $c_0 \in \{0, 1, 0\}$ et $T \in \{10^{-6}, 10^{-6}, 1\}$
- $(\mathcal{K}_h)_h$ suite de maillages cartésiens, $(\delta t_h)_h$ suite de pas de temps (uniformes) telle que $\delta t_h/4$ lorsque $h/2$: discrétisation Euler implicite- $(\mathfrak{C}\mathfrak{R}(\mathcal{K}_h))^d$, $\mathfrak{C}\mathfrak{R}(\mathcal{K}_h)$ pour $c_0 \in \{0, 1, 0\}$ et $T \in \{10^{-6}, 10^{-6}, 1\}$

Quelques exemples numériques 2D

—●— $c_0 = 0$ et $T = 10^{-6}$ —×— $c_0 = 1$ et $T = 10^{-6}$ —○— $c_0 = 0$ et $T = 1$

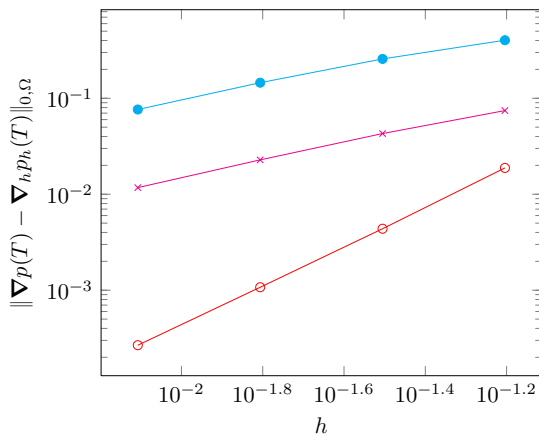


Figure: Erreur H^1 relative au temps T

Quelques exemples numériques 2D

—●— $c_0 = 0$ et $T = 10^{-6}$ —×— $c_0 = 1$ et $T = 10^{-6}$ —○— $c_0 = 0$ et $T = 1$

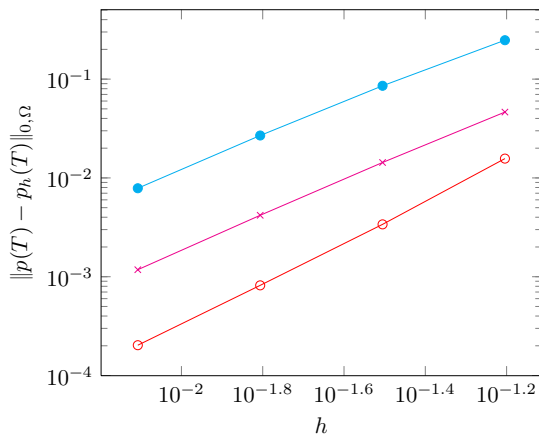


Figure: Erreur L^2 relative au temps T

Plan de l'exposé

Les couplages poromécaniques à l'IFPEn

Le modèle de Biot

Approximation interne

Mais où placer les inconnues ?

Quelques exemples numériques 2D

Perspectives

Complexification des modèles physiques

- **mécanique** : introduction de non-linéarités (grandes déformations, viscoplasticité), prise en compte de fractures
- **écoulement** : passage au modèle de Darcy compositionnel (et thermique)

Validation industrielle

- **3D** : à noter que la méthode et la théorie s'appliquent en dimension quelconque
- **cas réalistes et passage à l'échelle** : applications en réservoir, bassins et stockage du CO₂

MERCI DE VOTRE ATTENTION